Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1994).* Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 4 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \mu \\ 2 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme alle Parameter λ, $\mu \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$ gibt.
Hinweis:
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$, ob v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Falls v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet, können Sie das Prinzip der linearen Fortbildung (Satz 7.10) benutzen. Falls v_1, v_2, v_3 keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet, bestimmen Sie $\mu \in \mathbb{R}$ geeignet.

2. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2000).* Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume. Man beweise:

   a) Wenn es eine injektive lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, die nicht surjektiv ist, so gilt $\dim(V) < \dim(W)$.

   b) Wenn es keine injektive lineare Abbildung von V nach W gibt, so gilt $\dim(V) > \dim(W)$.

   Hinweis:
   In Satz 7.19 a) haben Sie schon gezeigt, dass für jede injektive lineare Abbildung $f : V \to W$ die Ungleichung $\dim(V) \leq \dim(W)$ gilt.
   Bei Teilaufgabe b) empfiehlt es sich zuerst zu zeigen, dass es eine injektive lineare Abbildung von V nach W gibt, falls $\dim(V) \leq \dim(W)$ vorrausgesetzt wird. Wieso ist damit ebenfalls die Aussage b) bewiesen?

3. Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

gegeben. Die zugehörige lineare Abbildung sei

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x.$$

Man bestimme eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildraums von f.

4. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2003).* Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$–Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Man entscheide (mit Begründung), welche der folgenden sechs Eigenschaften von f zueinander äquivalent sind:

(i)	f ist injektiv	(iv)	$\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim W$
(ii)	f ist surjektiv	(v)	$\dim \mathrm{Kern}(f) = 0$
(iii)	$\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V$	(vi)	$\dim \mathrm{Kern}(f) = \dim V - \dim W$

Hinweis:
Verwenden Sie die Sätze 7.15 und 7.18 aus der Vorlesung.